제 31회 전국 대학생 수학경시대회 (제 1 분야 풀이)

2012년 11월 17일 (10:00 - 13:00)

---

1. 다음 적분값 J를 구하여라.

$$J = \int_0^1 \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - x + 1}\, dx.$$

(풀이) 함수 $f(x) := \sqrt[3]{2x^3 - 3x^2 - x + 1}$이라 정의하면 $f(1-x) = -f(x)$를 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 $y = 1 - x$로 치환하면 $J = \int_1^0 f(y)dy = -J$가 되므로 $J = 0$이다.

2. 다음을 만족하는 정사각행렬 A, B가 존재하지 않음을 보여라. (단, I는 단위행렬이다.)

$$(AB)^{2012} - (BA)^{2012} = I.$$

(풀이) 모든 행렬 A, B에 대하여 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$가 성립한다. 따라서 $(AB)^{2012} - (BA)^{2012} = I$ 를 만족하는 행렬 A, B 가 존재하면,

$$n = \mathrm{tr}(I) = \mathrm{tr}((AB)^{2012} - (BA)^{2012}) = \mathrm{tr}(A(BA)^{2011}B) - \mathrm{tr}((BA)^{2012}) = 0$$

이 되어 모순이다.

3. 다음 우극한값을 계산하여라.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\tan x - x}}{\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}}.$$

(풀이) 실수 $x \geq 0$에 대하여, 분자와 분모를 테일러 급수로 표현하여 극한값을 구한다.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\tan x - x}}{\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots\right) - x}}{\left(x^{1/2} - \frac{1}{6}x^{3/2} + \frac{1}{120}x^{5/2} - \cdots\right) - x^{1/2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots}}{-\frac{1}{6}x^{3/2} + \frac{1}{120}x^{5/2} - \cdots} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{15}x^2 + \cdots}}{-\frac{1}{6} + \frac{1}{120}x - \cdots} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}} \bigg/ -\frac{1}{6} \\
&= -2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

4. 주어진 정수 $n \geq 2$에 대하여 다음 조건을 만족하는 $n \times n$ 행렬 A의 $\mathrm{tr}(A)$가 될 수 있는 값을 모두 구하여라. (단, I는 단위행렬이다.)

$$(1)\ \ \mathrm{rank}(A+I) = 1, \qquad\qquad (2)\ \ \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^3).$$

(풀이) 우선 정사각행렬 B의 rank가 1 이면, 임의의 자연수 m 에 대하여 $\mathrm{tr}(B^m) = \mathrm{tr}(B)^m$임을 보이자. 행렬 B 의 rank가 1 이므로 어떤 한 열이 존재해서 다른 열들은 그 열의 실배수가 된다. 따라서 $B = uv^T$인 영이 아닌 열벡터 u, v가 존재한다. 이때 B의 대각선의 합은 $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = v^T u$와 같이 구해진다. 따라서 $B^m = (uv^T)^m = u(v^T u)^{m-1} v^T = \mathrm{tr}(B)^{m-1} B$가 되고, 즉, $\mathrm{tr}(B^m) = \mathrm{tr}(B)^{m-1}\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(B)^m$이 된다.

이제 본 문제로 돌아가자. 행렬 $A + I = B$ 라 하면 (2)번 조건에 의하여

$$\mathrm{tr}\left((B-I)^3\right) = \mathrm{tr}(A^3) = \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B-I)$$

이므로 $\mathrm{tr}(B^3 - 3B^2 + 3B - I) = \mathrm{tr}(B - I)$이 성립한다. 보조정리를 이용하여 이 식을 정리하면

$$\mathrm{tr}(B)^3 - 3\mathrm{tr}(B)^2 + 3\mathrm{tr}(B) - n = \mathrm{tr}(B) - n$$

이다. 따라서 $\mathrm{tr}(B)(\mathrm{tr}(B)-1)(\mathrm{tr}(B)-2) = 0$이므로 $\mathrm{tr}(B)$로 가능한 값은 $0, 1, 2$ 뿐이고, 즉 $\mathrm{tr}(A)$로 가능한 값은 $-n,\ 1-n,\ 2-n$ 이 된다.

이제 각각의 경우에 실제로 가능한 A 가 존재함만 살펴주면 되는데, 이는 $v^T u = 0, 1, 2$ 가 되는 영이 아닌 u, v 를 잡아주어 B 를 만들고 I를 빼기만 하면 된다. 예를 들어,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & -2 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A) = 1-n \qquad\qquad \mathrm{tr}(A) = 2-n \qquad\qquad \mathrm{tr}(A) = -n$$

와 같이 잡아주면 된다.

5. 실수에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$ 를 만족한다. 이 때 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$3\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2\,dx \geq \left(2\int_0^1 f(x)dx\right)^2.$$

(풀이) 우선 $(xf(x))' = f(x) + xf'(x)$ 이므로 구간 $[0, \frac{1}{2}]$ 에서 적분하면

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\,dx = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

이고, 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx \int_0^{\frac{1}{2}} (f'(x))^2\,dx \geq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} xf'(x)\,dx\right)^2 = \left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx\right)^2$$

임을 얻는다.

한편 $((1-x)f(x))' = -f(x) + (1-x)f'(x)$ 이므로 구간 $[\frac{1}{2}, 1]$ 에서 적분하면

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$$

이고, 코시-슈바르츠 부등식에 의해

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^2\,dx \int_{\frac{1}{2}}^1 (f'(x))^2\,dx &\geq \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)f'(x)\,dx\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx\right)^2\end{aligned}$$

임을 얻는다.

이제 $\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = A$ 라 하고 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = B$ 라 하면, 주어진 조건에 의해 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx = 2B$ 이다. 그런데 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{24}$ 임은 쉽게 알 수 있으므로 위 두 부등식을 더하면

$$\frac{1}{24}\int_0^1 (f'(x))^2\,dx \geq (A-B)^2 + (A-2B)^2$$

가 되고, $(A-B)^2 + (A-2B)^2 = 2A^2 - 6AB + 5B^2 = 2\left(A - \frac{3}{2}B\right)^2 + \frac{1}{2}B^2$ 이므로

$$\begin{aligned}3\int_0^1 (f'(x))^2\,dx &\geq 36B^2 = (2(B+2B))^2 \\ &= \left(2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx\right)\right)^2 = \left(2\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\end{aligned}$$

가 성립함을 알 수 있다.

6. 모든 성분이 정수인 정사각행렬 A가 다음 조건을 만족하면 $A = I$임을 보여라. (단, I는 단위행렬이다.)

(1) 홀수인 소수 p에 대하여 행렬 $A - I$의 모든 성분은 p의 배수이다.

(2) $A^k = I$인 양의 정수 k가 존재한다.

(풀이) 위 조건을 만족하는 단위 행렬이 아닌 행렬 A가 존재한다고 가정하자. 이제 $A = I + p^k B$ $(k \geq 1)$ 이고 $B \not\equiv 0 \pmod p$인 행렬 B를 잡자. 먼저 $q \neq p$인 소수 q에 대하여 $A^q = I$라 하자. 그러면

$$I = A^q = (I + p^k B)^q = p^{kq} B^q + \cdots + \frac{q(q-1)}{2} p^{2k} B^2 + q p^k B + I$$

이므로 $B \equiv 0 \pmod p$가 되어 가정에 모순이다. 이제 $A^p = I$라 가정하자. 그러면

$$I = A^p = (I + p^k B)^p = p^{kp} B^p + \cdots + \frac{p(p-1)}{2} p^{2k} B^2 + p^{k+1} B + I$$

이므로 역시 $B \equiv 0 \pmod p$가 되어 가정에 모순이다. 마지막으로 소수가 아닌 n에 대하여 $A^n = I$라 하자. 그러면 $n = n'r$인 소수 r이 존재하고 $A^{n'} \equiv I \pmod p$를 만족한다. 따라서 앞의 결과에 의해 $A^n = (A^{n'})^r \neq I$이므로 모순이다.

7. 실수열 $X = \{x_i\}$ $(1 \leq i \leq n)$에 대하여, $m_k(X)$를 다음과 같이 정의한다.

$$m_k(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

만약 $m_1(X) = 0$이면, 다음 부등식이 항상 성립함을 보여라.

$$[m_3(X)]^2 \leq m_2(X) \left(m_4(X) - [m_2(X)]^2 \right).$$

(풀이) 먼저, 주어진 정의를 통해 $m_3(X)$를 변형하면 다음의 식이 성립함을 알 수 있다.

$$m_3(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 - m_2[X] x_i).$$

따라서, 코시 부등식에 의하여 다음의 부등식을 얻는다.

$$[m_3(X)]^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i (x_i^2 - m_2(X)) \right)^2 \leq m_2(X) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [x_i^2 - m_2(X)]^2 \right).$$

여기서 우변에 나타나는 합을 다시 정리하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [x_i^2 - m_2(X)]^2 = m_4(X) - 2 m_2(X) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) + [m_2(X)]^2 = m_4(X) - [m_2(X)]^2.$$

위에서 얻은 결과를 종합하면 문제에서 주어진 부등식이 성립함을 알 수 있다.

8. 두 번 미분가능한 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $f(0) = 0$이고 다음 조건을 만족할 때, $f(1) = 0$임을 보여라.

$$\left(f'(x) \right)^2 \leq f(x) f''(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

(풀이) $f(1) \neq 0$라고 가정하자. 또한 (필요하면 -1을 곱해서) $f(1) > 0$로 두자. 그러면 어떤 $c \in [0, 1)$가 존재하여 $f(c) = 0$이고 $x \in (c, 1]$을 만족하는 임의의 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$을 만족한다. 이제 $g(x) := \log f(x)$로 두면 $g'' > 0$임을 알 수 있고, $t \in (c, 1)$ 를 만족하는 임의의 실수 t에 대하여 $f(\frac{t+1}{2})^2 \leq f(t) f(1)$를 만족한다. 그러므로 $t \to c$이면, $f(\frac{c+1}{2})^2 \leq f(c) f(1) = 0$이 되어 모순이다.