제 30회 대학 수학 경시 대회 (제 1 분야 풀이)

2011년 11월 12일 (10:00 - 13:00)

---

1. 함수 $f(x)$ 가 다음과 같이 적분으로 정의되어 있다.

$$f(x) = \int_{\sin x}^{1+x} e^{t^2+2xt} dt.$$

이 때, $f'(0)$ 을 구하여라.

(풀이) 일반적으로

$$f(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} g\,(t,x)\,dt$$

일때,

$$\frac{d}{dx} f(x) = b'(x) \cdot g(b(x),x) - a'(x) \cdot g(a(x),x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} g(t,x)\,dt$$

이다. 따라서

$$f'(x) = 1 \cdot e^{(1+x)^2+2x(1+x)} - cos(x) \cdot e^{\sin^2 x+2x\sin x} + \int_{\sin x}^{1+x} 2t \cdot e^{t^2+2xt}\,dt$$

이고,

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1 \cdot e^1 - 1 \cdot e^0 + \int_0^1 2t \cdot e^{t^2}\,dt \\ &= (e-1) + \left[e^{t^2}\right]_0^1 \\ &= 2\,e - 2 \end{aligned}$$

(또 다른 풀이)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\sin x}^{1+x} e^{t^2+2xt}\,dt = e^{-x^2} \int_{\sin x}^{1+x} e^{t^2+2xt+x^2}\,dt \\ &= e^{-x^2} \int_{\sin x}^{1+x} e^{(t+x)^2}\,dt = e^{-x^2} \int_{x+\sin x}^{1+2x} e^{t^2}\,dt \end{aligned}$$

그래서

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-x^2})' \int_{x+\sin x}^{1+2x} e^{t^2}\,dt + e^{-x^2} \left(\int_{x+\sin x}^{1+2x} e^{t^2}\,dt \right)' \\ &= -2xe^{-x^2} \int_{x+\sin x}^{1+2x} e^{t^2}\,dt + e^{-x^2} \left(2e^{(1+2x)^2} - (1+\cos x) e^{(x+\sin x)^2} \right) \end{aligned}$$

그러므로

$$f'(0) = 0 + 1\left(2e^1 - 2e^0\right) = 2e - 2$$

2. 모든 성분 a_{ij} 가 양의 실수인 $n \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$ 가 임의의 $1 \le j \le n$ 에 대하여 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ 을 만족한다. 이 때, 방정식 $\det(A - xI) = 0$의 근의 절대값은 모두 1 이하임을 보여라.

(풀이) λ가 방정식 $\det(A - xI) = 0$의 한 해라 하자. 그러면 $Ax = \lambda x$를 만족하는 $x^t = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$가 존재한다. 즉, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \lambda x_i$ $(1 \le i \le n)$를 만족한다. 따라서 $|\lambda||x_i| \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j|$를 만족하므로

$$|\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

가 성립한다. 한편 $x \neq 0$ 이므로 $|\lambda| \le 1$를 만족한다.

3. 다음 정적분 $\int_0^\infty x^3 \pi^{-\sqrt[3]{x^8}} dx$ 의 값을 구하여라.

(풀이) $u = (\ln \pi)^{1/2} x^{4/3}$으로 치환하면,

$$du = \frac{4}{3} (\ln \pi)^{1/2} x^{1/3} dx$$

이므로,

$$\int_0^\infty x^3 \pi^{-\sqrt[3]{x^8}} dx = \int_0^\infty x^3 e^{-(\ln \pi)\sqrt[3]{x^8}} dx = \frac{3}{4(\ln \pi)^{3/2}} \int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du$$

임을 알 수 있다. 한편,

$$(ue^{-u^2})' = -\frac{1}{2} e^{-u^2}$$

임을 이용하여 위의 적분을 부분적분을 통해 계산하면, $\lim_{u \to \infty} ue^{-u^2} = 0$이므로,

$$\int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du = -\frac{1}{2} \lim_{u \to \infty} ue^{-u^2} + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

를 얻는다. 따라서,

$$\int_0^\infty x^3 \pi^{-\sqrt[3]{x^8}} dx = \frac{3}{4(\ln \pi)^{3/2}} \int_0^\infty u^2 e^{-u^2} du = \frac{3\sqrt{\pi}}{16(\ln \pi)^{3/2}}$$

이다.

4. 임의의 양의 정수 n에 대하여, 집합 $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + 3y^2 = n\}$의 원소의 개수를 $A(n)$이라 하자. 집합 $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + 3(4y^2 - 3y) = n\}$의 원소의 개수는 $\frac{1}{2} A(16n + 27)$임을 보여라.

(풀이) 우선

$$\#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + 3(4y^2 - 3y) = n\} = \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 16x^2 + 3(8y - 3)^2 = 16n + 27\}$$

임에 주목하자. 만약 $x, y \in \mathbb{Z}$에 대하여, $x^2 + 3y^2 = 16n + 27$이면, $x \equiv 0 \pmod 4$ 이고 $y \equiv \pm 3 \pmod 8$임이 자명하다. 또한 (x, y)가 주어진 식을 만족하면 $(x, -y)$도 주어진 식을 만족하고 $y \neq 0$임이 자명하다. 따라서

$$\begin{aligned} \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 16x^2 + 3(8y - 3)^2 = 16n + 27\} &= \tfrac{1}{2} \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + 3y^2 = 16n + 27\} \\ &= \tfrac{1}{2} A(16n + 27). \end{aligned}$$

5. 두 번 미분 가능한 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$는 $f(0) = 0$을 만족한다. 이 때, 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2} dx.$$

(풀이) 구간 $(0, 1)$에서 $g(x) = x^{-1/2} f(x)$라 하자. 그러면,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} g(x) + \sqrt{x} g'(x) = \frac{1}{2x} f(x) + \sqrt{x} g'(x)$$

이므로,

$$|f'(x)|^2 - \frac{|f(x)|^2}{4x^2} = x|g'(x)|^2 + g(x)g'(x) = x|g'(x)|^2 + \frac{1}{2}(g(x)^2)'$$

임이 성립함을 알 수 있다. 한편 $g(x)$는 $(0, 1)$에서 연속이며

$$\lim_{x \to 0} (g(x))^2 = \lim_{x \to 0} \frac{(f(x))^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2f(x)f'(x)}{1} = 0$$

이므로,

$$\int_0^1 \left(|f'(x)|^2 - \frac{|f(x)|^2}{4x^2} \right) dx = \int_0^1 \left(x|g'(x)|^2 + \frac{1}{2}(g(x)^2)' \right) dx \geq \frac{1}{2} \int_0^1 (g(x)^2)' dx = \frac{1}{2}(g(1))^2 \geq 0$$

을 얻게 되어 문제에서 주어진 부등식이 증명된다.

6. 주어진 $n \times n$ 행렬 $A = (a_{ij})$ 가 $1 \leq i, j \leq n$ 에 대하여 다음을 만족한다.

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1, & i = j \text{ 일 때,} \\ ij, & i \neq j \text{ 일 때.} \end{cases}$$

이 행렬 A의 모든 고유치(eigenvalue)들과 행렬식을 구하라.

(풀이) $p = (1, 2, 3, \cdots, n)^T$라 두면 $A = pp^T - I$이다. a가 A의 고유치라면, 어떤 벡터 $x \neq 0$에 대하여 $Ax = ax$만족하므로

$$pp^T x - Ix = (p^T x)p - x = ax$$

를 만족한다. 따라서 p는 x와 평행하거나 수직이다. 만일 p가 x와 평행하면 $p = x$라 둘 수 있고 $((p^T p) - 1) = a$를 만족하므로 $a = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1$이다. 만일 p가 x와 수직이면,

$$pp^T x - x = (p^T x)p - x = -x$$

를 만족하므로 $a = -1$이다. 또한 고유치 -1에 해당하는 고유공간 $\{x \mid p \perp x\}$는 $n - 1$ 차원 벡터공간이다. 따라서 행렬식은 $(-1)^{n-1}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1)$이다.

7. 좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원판 D가 있다.

(1) 다음 이중적분의 값을 구하여라.

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy.$$

(2) 가로의 길이가 2011 이고 세로의 길이가 각각 $a_1, \cdots, a_n$ 인 n개의 직사각형 종이조각들이 주어져 있다. 만약 $\sum_{i=1}^{n} a_i < 2$ 이면, 이 종이들로 원판 D를 덮을 수 없음을 보여라. (단, 종이들을 겹치는 것은 허용하되 접거나 찢는 것은 허용하지 않는다.)

(풀이) (1) 극좌표를 이용하여 계산하면

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^1 d\theta = 2\pi\end{aligned}$$

이므로, 답은 2π 이다. (또는 (2) 의 풀이에서 $a=-1$, $b=1$ 인 경우이므로 2π 임을 얻는다.)

(2) 종이의 길이가 모두 무한하다고 가정하고 원판을 덮을 수 없음을 보이면 충분하다. 우선 한 종이가 원판 D 중에서 $a \le x \le b$ 인 범위를 덮는다고 하자. 이 때 덮이는 부분을 W 라 하면,

$$\begin{aligned}\iint_W \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy &= \int_a^b \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dydx \\ &= \int_a^b \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dtdx \quad \left(y = \left(\sqrt{1-x^2}\right) t \text{ 치환}\right) \\ &= \int_a^b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta dx \quad (t = \sin\theta \text{ 치환}) \\ &= (b-a)\pi\end{aligned}$$

임을 얻는다. 이제 i 번째 직사각형 종이가 원판을 부분적으로 덮는 부분을 W_i 라 하고 함수 $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 의 적분값을 살펴보자. f의 함수값은 원점으로부터의 거리에 의해서만 값이 결정되므로 $\iint_{W_i} f\, dA$ 를 구하기 위해 이 종이가 y 축에 평행하다고 가정해도 상관없다. 그러면 종이의 너비가 곧 W_i 가 덮는 x 축의 길이이므로 위에서 계산한 결과에 의해

$$\iint_{W_i} f\, dA = a_i\pi$$

임을 쉽게 알 수 있다.
이제 이 n 개의 종이들이 원을 덮는다고 가정하면 $\cup W_i = D$ 이므로,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\pi = \sum_{i=1}^{n}(a_i\pi) = \sum_{i=1}^{n}\iint_{W_i} f\,dA \;\geq \iint_{D} f\,dA \;= 2\pi$$

를 얻고, 따라서 $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 2$ 이어야 한다. 즉, $\sum_{i=1}^{n} a_i < 2$ 이면 이 종이들로 원판을 덮을 수 없다.

8. 3차원 유클리드 공간 상의 직선 ℓ과 평면 P가 원점에서 만난다고 가정하자. 선형변환 f는 ℓ을 축으로 하는 어떤 회전이고, 또다른 선형변환 g는 P에 대한 반사(reflection)라 한다. 그러면, 수직하게 만나는 직선 ℓ'과 평면 P'이 있어서 ℓ'을 축으로 하는 어떤 회전 f'과 P'에 대한 반사 g'에 대하여 $f \circ g = f' \circ g'$을 만족함을 보여라.

(풀이) 3차원 공간 상에에서 P를 xz 평면으로 잡고, P_1, P_2을 각각 yz, xy 평면이라 하자. 일반성을 잃지 않고 L은 원점을 지나는 P_1 상의 한 직선이라 가정할 수 있다. $i = 1, 2$일 때, g_i는 P_i에 대한 반사를 일컫는다 하자. L을 포함하는 어떤 평면 P_3가 있어서, P_3에 대한 반사인 g_3에 대하여

$$f = g_3 \circ g_1$$

을 만족한다. 이제 $L' = P_2 \cap P_3$라 하고 P'은 원점을 지나면서 L'과 수직인 평면으로 잡고, g'을 P'에 대한 반사라 하자. 여기서 $P \cap P'$는 z 축과 일치한다. 따라서 $g \circ g'$은 z 축에 대한 회전이고, P_1 역시 z 축을 포함하므로 z 축을 포함하는 또다른 평면 P_4가 있어서 P_4에 대한 반사 g_4에 대하여 $g \circ g' = g_1 \circ g_4$이 성립한다. 따라서, $f' = g_3 \circ g_1 \circ g \circ g'$이라 하면,

$$f' = g_3 \circ g_1 \circ g_1 \circ g_4 = g_3 \circ g_4$$

는 두 개의 반사의 합성 함수이므로 회전이다. 한편, $g_1 \circ g$는 z 축을 회전축으로 하는 π 만큼의 회전이고, 따라서 P_2 상의 모든 직선을 보존한다. 이제

$$f'(L') = g_3 \circ g_1 \circ g \circ g'(L') = g_3 \circ g_1 \circ g(L') = g_3(L') = L'$$

이다. 마지막 등식이 성립하는 이유는 $L' \subseteq P_3$이기 때문이다. 결국 f'의 회전축은 L'임을 알 수 있다. 마지막으로,

$$f \circ g = g_3 \circ g_1 \circ g = (g_3 \circ g_1 \circ g \circ g') \circ g' = f' \circ g'$$

이다.